B **Matemática Discreta 1** Primer parcial	1^{er} Apellido: ____________________	3 de noviembre de 2016
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ____________________ Nombre: ____________________ Número de matrícula:	Tiempo 2 h 30 min. **Nota:**

Ejercicio 1 (3 puntos)

En el conjunto $\mathbb{N}$ se define la relación aRb, con $a, b \in \mathbb{N}$, si y sólo si $3|(a-b)$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{N}$ y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 5.

Solución:

1. Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}$, se tiene que aRa

$$a = a + 3 \cdot 0 \Rightarrow 3|(a-a) \Rightarrow aRa$$

2. Simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{N}$, si aRb, entonces bRa

$$aRb \Rightarrow 3|(a-b) \Rightarrow a = b + 3n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = a + 3(-n) \Rightarrow 3|(b-a) \Rightarrow bRa$$

3. Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, si aRb y bRc, entonces aRc

$$\left.\begin{array}{r} aRb \Rightarrow 3|(a-b) \Rightarrow a = b + 3n_1,\ n_1 \in \mathbb{Z} \\ bRc \Rightarrow 3|(b-c) \Rightarrow b = c + 3n_2,\ n_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow a = c + 3(n_1 + n_2),\ n_1 + n_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow aRc$$

La clase de equivalencia del 5 es

$$[5] = \{n \in \mathbb{N} \mid 3|(5-n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists t \in \mathbb{Z}, n = 5 + 3t\} = \{2, 5, 8, 11, ...\}.$$

Ejercicio 2 (12 puntos)

Considera el conjunto ordenado A de la figura 1.

a) Sea $B = \{g, d, b\}$, encuentra todos los elementos notables de B (cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay).

b) Encuentra, si existen, todos los elementos complementarios de f y de e.

c) Razona si A es Álgebra de Boole.

Sean $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ y $(Y, \leq)$ dos conjuntos ordenados, con $X = \{a, b\}$, $Y = \{0, 1\}$, y donde $\mathscr{P}(X)$ es el conjunto de las partes de X.

d) Calcula el cardinal del producto cartesiano $\mathscr{P}(X) \times Y$.

e) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\mathscr{P}(X) \times Y, \leq_{Prod})$, donde $\leq_{Prod}$ es la relación "orden producto".

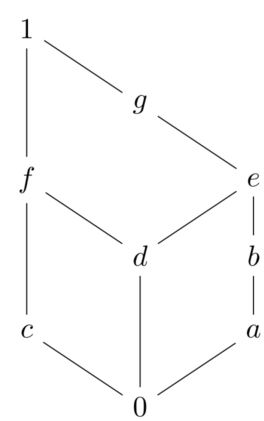


Figura 1: A

Solución:

a)

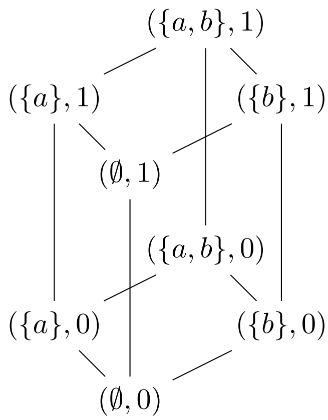
Cotas superiores: $\{1, g\}$
Cotas inferiores: $\{0\}$
Supremo: g
Ínfimo: 0
Maximales: $\{g\}$
Minimales: $\{d, b\}$
Máximo: g
Mínimo: no hay

b) El elemento f tiene dos elementos complementarios a y b, mientras que el elemento e tiene como único complementario el elemento c.

c) No es Álgebra de Boole ya que A no es retículo complementario. Por ejemplo, el elemento d no tiene complementario.

d) $\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $|\mathscr{P}(X) \times Y| = 8$.

e)



Ejercicio 3 (10 puntos)

Utilizando el método de Quine McCluskey, obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es

$$S(f) = \{0001, 0011, 0110, 1001, 1010, 0111, 1011\}.$$

Solución: $f(x, y, z, t) = y't + x'yz + xy'z$

$$\begin{array}{cl} * & 0001 \\ \hline * & 0011 \\ * & 0110 \\ * & 1001 \\ * & 1010 \\ \hline * & 0111 \\ * & 1011 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cl} * & \text{00-1} \\ * & \text{-001} \\ \hline & \text{0-11} \\ & \text{011-} \\ * & \text{-011} \\ * & \text{10-1} \\ & \text{101-} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{-0-1} \\ \cancel{\text{-0-1}} \end{array}$$

	0001	0011	0110	1001	1010	0111	1111
0-11		X				X	
011-			X			X	
101-					X		X
-0-1	X	X		X			X

Ejercicio 4 (3 puntos)

Demuestra, aplicando el Principio de Inducción, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución:

1. Comprobamos que se cumple para $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{3} \qquad = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

2. Asumimos que se cumple para n, y comprobamos que también se cumple para $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{2n^2+3n+1}{2n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)(n+1)}{2n+3} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Ejercicio 5 (12 puntos)

Jaime desea renovar el mobiliario de su cafetería, para ello adquiere 78 sillas y 24 mesas. Cuando llega a su casa no recuerda si el coste total de la compra ha sido de 9045 € o de 9540 €, pero si recuerda que cada silla costó una cantidad exacta de euros, mayor que 80 € y cada mesa una cantidad exacta de euros, mayor que 120 €.

a) ¿Cuánto dinero ha invertido exactamente?

b) Averigua cuánto costó cada mesa y cada silla.

Solución:

a) Sean x el precio de cada silla, e y el precio de cada mesa, para encontrar cuando dinero se ha invertido tenemos que resolver alguna de las siguientes ecuaciones diofánticas

$$78x + 24y = 9045, \qquad 78x + 24y = 9540.$$

Calculamos entonces el máximo común dividor de los coeficientes (utilizando el algoritmo de Euclides) y comprobamos si las ecuaciones anteriores tienen solución:

$$\left.\begin{array}{l} 78 = 3\cdot 24 + 6 \\ 24 = 4\cdot 6 \end{array}\right\} \Rightarrow mcd(78,24) = mcd(24,6) = 6$$

Comprobamos que 6 no divide a 9045 luego la ecuación $78x + 24y = 9045$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$. Por otro lado, sí se cumple que $6|9540$ por lo que la ecuación $78x + 24y = 9540$ sí tiene soluciones enteras. El dinero invertido es 9540 €.

b) Obtenemos una solución particular de la ecuación $78x + 24y = 9540$ utilizando el algoritmo extendido de Euclides:

$$6 = 78 - 24 \cdot 3 \Rightarrow 9540 = 78 \cdot \frac{9540}{6} - 24 \cdot 3 \cdot \frac{9540}{6} \Rightarrow 9540 = 78 \cdot 1590 + 24 \cdot (-4770)$$

Luego $x_0 = 1590$, $y_0 = -4770$, y el resto de soluciones son:

$$\begin{cases} x = 1590 + 4t \\ y = -4770 - 13t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Como también debe cumplirse que $x > 80$, $y > 120$, tenemos que

$$\begin{cases} x = 1590 + 4t > 80 \\ y = -4770 - 13t > 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -377{,}5 \\ t < -376{,}1 \end{cases} \Rightarrow t = -377 \Rightarrow \begin{cases} x = 82 \\ y = 131 \end{cases}$$

Luego cada silla cuesta 82 € y cada mesa 131 €.